Összefonódottság detektálása egyszerű mérésekkel

Tóth Géza

Max-Plank-Intitute für Quantenoptik,
Garching, Németország

Szeged, 2003. december 15.

Vázlat

- Összefonódottság detektálása a sűrűségmátrix alapján
  * Pozitív parciális transzponált
  * Korrelációs mátrix (Gauss-i állapotok)
- Összefonódottság detektálása méréssel
  * Tanúoperátorok (EPR pár, GHZ, W és klaszter állapot)
  * Bizonytalansági relációk

$$[\Delta(x_1 + x_2)]^2 + [\Delta(p_1 + p_2)]^2 < 2$$

$$[\Delta(J_{x1} + J_{x2})]^2 + [\Delta(J_{y1} + J_{y2})]^2 + [\Delta(J_{z1} + J_{z2})]^2 < 1$$

$$[\Delta(N_1 + N_2)]^2 + [\Delta(a_1 - a_2)]^2 < \sqrt{N_1 + N_2 + \frac{1}{4}} - \frac{3}{4}$$

Összefonódottság

- Egy kétrészű kvantumrendszer szeparálható (nem összefonódott) állapotban van, ha a sűrűségmátrixa felírható

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k^{(1)} \otimes \rho_k^{(2)}$$

alakban.

- A sűrűségmátrixszal *szükséges és elégséges* feltételek ismertek összefonódottságra a következő esetekben:

  -2x2, 2x3 rendszerek [Peres]

  -Kétmódusú rendszerek [Duan, Simon]

  -Többmódusú rendszerek Gauss-i állpotokban [Giedke]

- Igen sok esetben csupán *elégséges* feltétel ismert. (pl. NxM-es rendszerek, 2-nel több módusú rendszerek)

Pozitív definit parciális transzponált [Peres]

- Ha a rendszer szeparálható, akkor a sűrűségmátrix parciális transzonáltja pozitív definit (ilyenkor parciális transzponált is lehetne egy fizikai sűrűségmátrix)

$$\rho^{T1} = \sum_k p_k \left(\rho_k^{(1)}\right)^T \otimes \rho_k^{(2)}$$

- Ez szükséges és elégséges feltétel szeparálhatóságra 2x2-es és 2x3-as esetekben rendszerekre, míg nagyobb rendszereknél csupán szükséges feltétel.

Gauss-i állapotok [Duan, Simon]

- A korrelációs mátrix teljesen jellemez egy kétmódusú Gauss-i állapotot

$$\gamma = \begin{pmatrix} \langle x_1 x_1 \rangle & \langle x_1 p_1 \rangle & \langle x_2 p_1 \rangle & \langle x_2 p_2 \rangle \\ \langle p_1 x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_2 x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle p_2 x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad \gamma_{corr} = \gamma + \gamma^T$$

- A renszder összefonódott, ha $\tilde{\gamma}_{corr} - iJ$ nem pozítív szemidefinit. Itt $\tilde{\gamma}_{corr}$ a parciális transzponálthoz tartozó korrelációs mátrix, J az operátorok kommutátorait tartalmazza.

Összefonódottság detektálása kisérleti körulmények között

- Egy tényleges kísérletben nem lehet az egész sűrűség-mátrixot meghatározni. Csupán néhány mennyiséget lehet mérni. Ezekkel a mérési eredményekkel kell összefonódottságot detektaló *elégséges* feltételeket konstruálni.
- Lehetséges eljárások
  - Bell-egyenlőtlenségek
  - Összefonódottság tanúoperátor (Entanglement witness)
  - Elégséges feltételek Heisenberg bizonytalansági relációkra alapozva

Összefonódottság detektálása tanúoperátorral I.

- Egy W operátor akkor tanúoperátor, ha tr(ρW) <0 csak néhány összefonódott állapot esetén. (Minden szeparálható állapotra tr(ρW) >0.)
- Példa két qubitre. Szeparálható állpotokra

$$\left\langle \sigma_x^1 \sigma_x^2 \right\rangle + \left\langle \sigma_y^1 \sigma_y^2 \right\rangle + \left\langle \sigma_z^1 \sigma_z^2 \right\rangle \leq 1$$

- Összefonódott állapotkra a bal oldal maximuma 3. Ezt a |00> + |11> állapotra veszi fel (=EPR pár).
- Ebből a következö tanúoperátor szerkeszthető

$$W = 1 - \sigma_x^1 \sigma_x^2 - \sigma_y^1 \sigma_y^2 - \sigma_z^1 \sigma_z^2$$

Tanúoperátorok II.

- Bizonyítás. Szorzat állapotra

$$\langle \sigma_x^1 \sigma_x^2 \rangle + \langle \sigma_y^1 \sigma_y^2 \rangle + \langle \sigma_z^1 \sigma_z^2 \rangle =$$

$$\langle \sigma_x^1 \rangle \langle \sigma_x^2 \rangle + \langle \sigma_y^1 \rangle \langle \sigma_y^2 \rangle + \langle \sigma_z^1 \rangle \langle \sigma_z^2 \rangle = \vec{n}_1 \vec{n}_2 \leq 1$$

Itt n_1 es n_2 *1*-nél nem hosszabb Bloch vektorok.

$$\langle \sigma_x^1 \sigma_x^2 \rangle + \langle \sigma_y^1 \sigma_y^2 \rangle + \langle \sigma_z^1 \sigma_z^2 \rangle \leq 1$$

- Szeparálható állapotra is igaz, mivel a kifejezés lineáris operátor várható értékekben. Q.E.D.

Tanúoperátorok III.

- Tanúoperátor GHZ (=000+111) állapotra [Gühne]:

$$W = \frac{3}{4}1 - |GHZ\rangle\langle GHZ|$$

- Tanúoperátor a W (=100+010+001) állapotra [Gühne]:

$$W = \frac{2}{3}1 - |W\rangle\langle W|$$

Tanúoperátorok IV.

- Az tanúoperátort lokálisan mérhető operátrokra kell dekomponálni [Gühne]:

$$|GHZ\rangle\langle GHZ| \rightarrow$$

$$1 \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z,$$

$$\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x,$$

$$(\sigma_x + \sigma_y) \otimes (\sigma_x + \sigma_y) \otimes (\sigma_x + \sigma_y), \ldots$$

Tanúoperátorok V.

- Másik példa spin láncokra [Toth2]

$$W = \frac{N}{2} - \left\langle \sum_k \sigma_z^{(k-1)} \sigma_x^{(k)} \sigma_z^{(k+1)} \right\rangle$$

Ha tr(ρW) <0 akkor a rendszer összefonódott.
A tr(ρW) minimális *klaszter* állapotokra. [Briegel]
A klaszter állapot a szinglet és a GHZ állapot egyfajta általanosítása sok qubitre.

Összefonódottság detektálása bizonytalansági relációkkal I.

- Egyszerű példa kétmódusú rendszerekben. Szükséges feltétel szeparálhatóságra [Duan]:

$$[\Delta(x_1 + x_2)]^2 + [\Delta(p_1 - p_2)]^2 \geq 2$$

A bizonyítás azon alapul, hogy szorzatállapotokra a részrendszer bizonytalanságok összeadódnak

$$[\Delta(x_1 + x_2)]^2 + [\Delta(p_1 - p_2)]^2 =$$
$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta p_1)^2 + (\Delta p_2)^2 \geq 2$$

Összefonódottság detektálása bizonyталansági relációkkal II.

- Szeparalható állapotokra

$$[\Delta(x_1+x_2)]^2+[\Delta(p_1+p_2)]^2\geq$$

$$\sum_k p_k\left\{(\Delta x_1)_k^2+(\Delta x_2)_k^2\ +(\Delta p_1)_k^2+(\Delta p_2)_k^2\right\}\geq 2$$

A szeparalható állapot szorzatállapotok összege.
Q.E.D.

- Vagyis szeparalható (nem összefonódott) állpotokra

$$[\Delta(x_1+x_2)]^2+[\Delta(p_1-p_2)]^2\geq 2$$

- Fontos! $[x_1+x_2, p_1-p_2]=[x_1, p_1]-[x_2, p_2]=0$

Összefonódottság detektálása bizonytalansági relációkkal III.

- Általanos elv:
- (i) Heisenberg bizonytalansági relációk a részrendszerekre (konstans alsó határ!)

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta p_1)^2 \geq 1$$

$$(\Delta x_2)^2 + (\Delta p_2)^2 \geq 1$$

- (ii) “összeadva” őket szükséges feltételt kapunk szeparálhatóságra

$$[\Delta(x_1 + x_2)]^2 + [\Delta(p_1 - p_2)]^2 \geq 2$$

Összefonódottság detektálása kétmódusú rendszerekben

- Másik kritérium kétmódusú rendszerekre [Tóth]

  A kritérium alapjául szolgáló bizonytalansági reláció a következő

$$[\Delta N_a]^2 + [\Delta a]^2 \geq \sqrt{\langle N_a \rangle + \frac{3}{4}} - 1 \qquad [\Delta a]^2 \geq \langle a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle$$

- Ez a reláció a szám-fázis bizonytalansági reláció alternatívája, de a fázisoperátorral kapcsolatos nehézségek nélkül.

Összefonódottság detektálása kétmódusú rendszerekben II.

- Erre alapozva a következő elégséges feltételt lehet konstruálni összefonódottságra:

$$[\Delta(N_a + N_b)]^2 + [\Delta(a-b)]^2 < \sqrt{\langle N_a + N_b \rangle + \frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{4} - 2$$

- A kritérium összefonódott állapotokat detektál a következő (nem Gauss-i) állapot közelében

$$\Psi = \left(a^\dagger + b^\dagger\right)^N |0,0\rangle$$

Összefonódottság detektálása kétmódusú rendszerekben III.

- Egyszerűsítés

$$[\Delta(N_a + N_b)]^2 + [\Delta(a-b)]^2 < \sqrt{\langle N_a + N_b\rangle + \frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{4} - 2$$

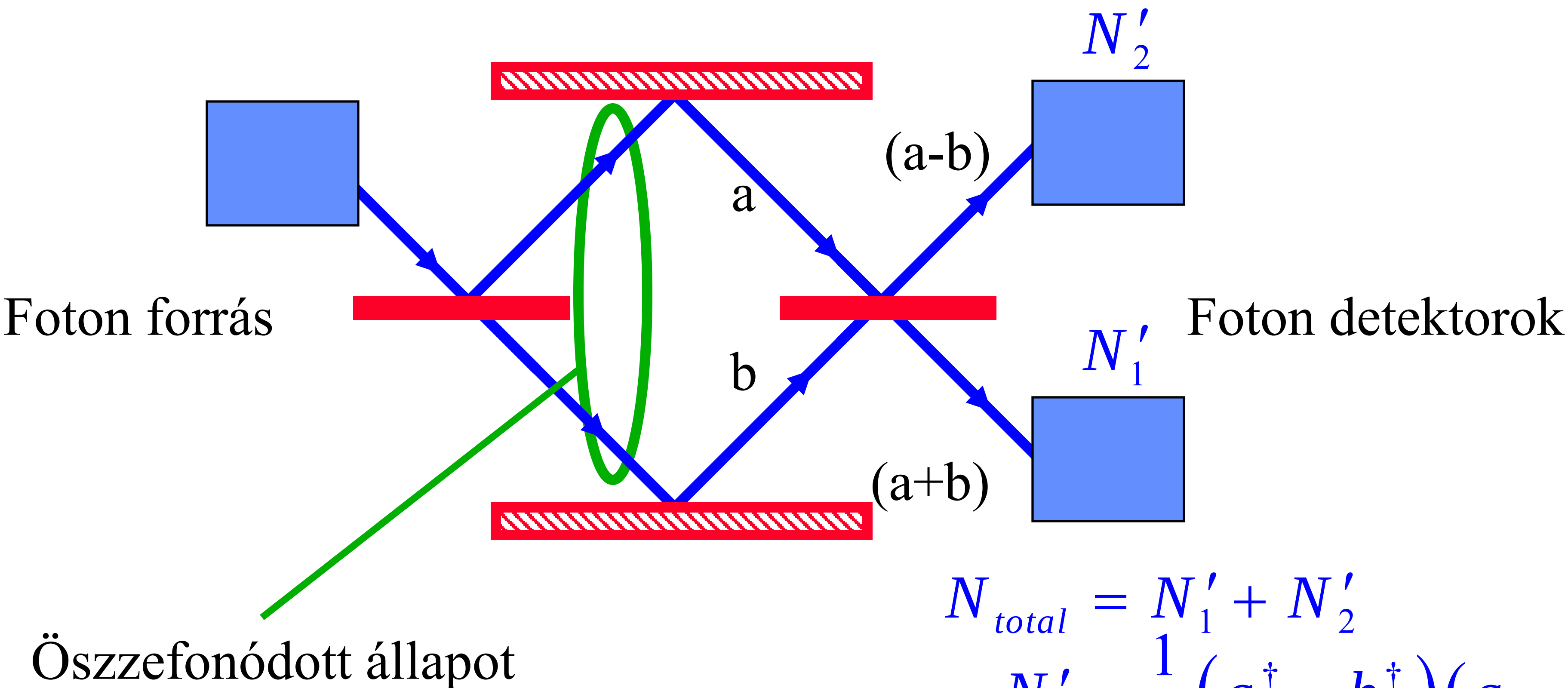
- Ez alapján a következő egyenlőtlenség is elégséges feltétel összefonódottságra:

(Most már csak részecskeszám mérésre van szükség!)

$$[\Delta(N_a + N_b)]^2 + \left\langle (a^\dagger - b^\dagger)(a-b) \right\rangle < \sqrt{\langle N_a + N_b\rangle + \frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{4} - 2$$

Összefonódottság detektálása kétmódusú rendszerekben IV.

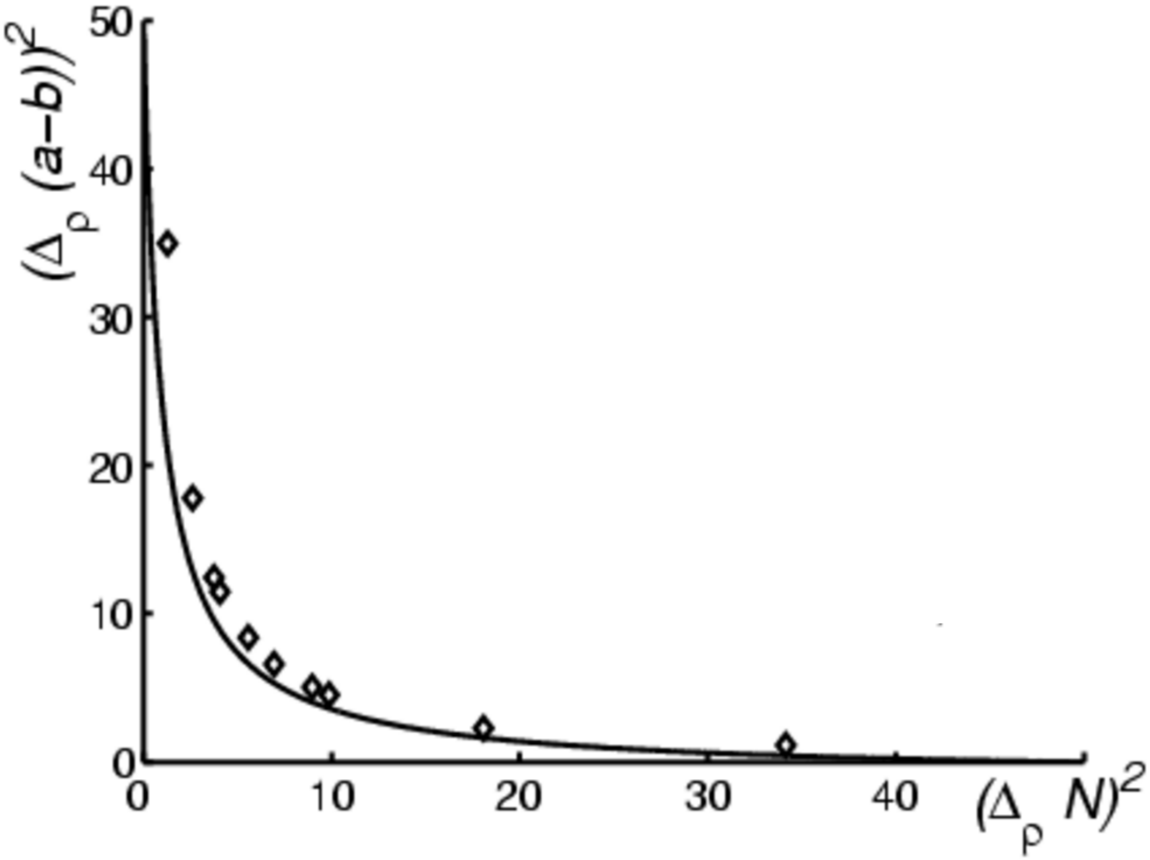
- Sematikus ábra a fizikai realizációra



$$N_{total} = N_1' + N_2'$$

$$N_1' = \frac{1}{2}\left(a^\dagger - b^\dagger\right)\left(a - b\right)$$

Összefonódottság detektálása kétmódusú rendszerekben V.



Összefonódottság detektálása sokaságban

Összefonódottság detektálása különböző spinű részecskék között (J=összes spin) [Hoffmann, Tóth2]

$$(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 < \frac{N}{2}$$

A szinglet állapotra a bal oldal =0.
(Erre az állapotra: $J_x{}^2 + J_y{}^2 + J_z{}^2 = 0$)

Spin squeezing

- A *spin sqeezing* kritérium [Sørensen] sok-test összefonódottságot detektál kollektív mérés alapján

$$\zeta = \frac{N\left(\Delta J_z\right)^2}{\left\langle J_x \right\rangle^2 + \left\langle J_y \right\rangle^2} < 1$$

- Ha ez a feltétel teljesül, akkor a kétállapotú rendszerek (pl. kétállapotú atomok) összefonódott állpotban vannak.

Összefonódottság „részecskék“ és „módok“ között

- A „részecske képben” a következő állapot két állapot szuperpozíciója

$$\Psi_r = |0\rangle + |1\rangle$$

Szeparálhatóság:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k^{(1)} \otimes \rho_k^{(2)} \otimes \cdots \otimes \rho_k^{(N)}$$

- A „mód képben” (bozonok) ez az egyrészecskés (!) állapot összefonódott

$$\Psi_m = |0,1\rangle + |1,0\rangle$$

Szeparálhatóság:

$$\tilde{\rho} = \sum_k \tilde{p}_k \tilde{\rho}_k^{(1)} \otimes \tilde{\rho}_k^{(2)}$$

Összefoglalás

- Összefonódottság detektálása a sűrűségmátrix alapján
  * Pozitív parciális transzponált
  * Korrelációs mátrix
- Összefonódottság detektálása méréssel
  * Tanúoperátorok (EPR pár, GHZ, W, klaszter állapot)
  * Bizonytalansági relációk

  x és p

  J_x, J_y és J_z

  N és a

Honlap:

http://www.mpq.mpg.de/Theorygroup/CIRAC/people/toth

Irodalom

- [Briegel] H.-J. Briegel, quant-ph/0004051.
- [Duan] L.-M. Duan *et. al*., PRL **84**, 2722 (2000).
- [Giedke] Giedke, Kraus, *et. al*. PRL **87**, 167904 (2001).
- [Gühne] Gühne, Hyllus *et. al*. quant-ph/0301162.
- [Hofmann] H.F. Hoffmann *et. al*., PRA **68**, 032103.
- [Sørensen] Sørensen *et. al.* , Nature 409, **63** (2001).
- [Peres] A. Peres, PRL **77**, 1413 (1996).
- [Simon] R. Simon, PRL **84**, 2726 (200).
- [Tóth] G. Tóth, C. Simon, I. Cirac,
PRA (2003 december); quant-ph/0306086.
- [Tóth2] G. Tóth, quant-ph/0310039.